La congettura di Collatz sui numeri congrui 3 mod 4 tramite la successione personalizzata

Autore: Prof. Nicola Ardito

Affiliazione: Ricercatore indipendente in matematica

BARI – ITALIA 26 Giugno 2026

Abstract

In questo articolo, che segue i miei lavori precedenti, viene approfondita la dinamica della successione personalizzata associata alla congettura di Collatz per i numeri dispari N congrui 3 mod.4, nella quale in ogni **iterazione (**intesa come insieme di passaggi dispari e di passaggi pari dipendente dal numero iniziale della stessa iterazione) si raggiungere il successivo numero dispari che diventa il numero iniziale della iterazione successiva. Tale struttura permette di classificare ogni iterazione in quattro casi distinti (3-4-5-6), in base alla decomposizione del numero iniziale. I casi 3 e 4 sono sempre discendenti (quando il numero iniziale N della iterazione è congruo 1 mod. 4), mentre i casi 5 e 6 possono essere sia discendenti che ascendenti (il numero iniziale N della iterazione è congruo 3 mod. 4). Si dimostra che tutti i numeri iniziali che generano iterazioni ascendenti appartengono a due sole famiglie canoniche (C e D) di numeri congrui 3 mod.4 e che tali famiglie non possono produrre iterazioni ascendenti indefinitamente. Si dimostra che la percentuale dei numeri appartenenti alle famiglie C e D non discendenti nelle prime iterazioni si riduce a poche unità e si dimostra che ogni numero appartenente alle famiglie C e D deve necessariamente entrare in un caso discendente (**decadimento geometrico**) per cui nelle iterazioni successive si ottiene un valore minore di quello iniziale.

1. Introduzione

La successione canonica di Collatz è definita per ogni intero positivo come segue:N

- Se è pari: $N \to N/2$
- Se è dispari: $N \to 3N + 1$

La congettura afferma che, indipendentemente dal valore iniziale N, la successione converge sempre ad **1**. Nonostante la sua apparente semplicità, nessuna dimostrazione generale è stata ancora trovata.

In questo articolo viene approfondita la congettura personalizzata equivalente alla congettura canonica di Collatz per i numeri N dispari congruo 3 mod. 4 dei casi 5 e 6 in cui ogni numero N può essere scritto nella forma: N = 2^p*(1 + 2k) − 1 ed a seconda della parità di p e k, l'iterazione composta appartiene al caso 5 con p e k aventi la stessa parità e oppure al caso 6 con p e k aventi parità opposta .

2. Classificazione dei casi 5 e 6 in 4 famiglie di numeri dispari congruo 3 mod.4

Per studiare le iterazioni ascendenti si introduce una classificazione in quattro famiglie di numeri dispari congrui 3 mod.4, basata sulla struttura 2-adica e sulla congruenza modulo 4.

Famiglia **A**: N = 2^p*(1 + 4w) − 1, con p pari, p ≥ 2, k pari e k=2*w con w>=0;
Famiglia **B**: N = 2^p*(3 + 4w) − 1, con p dispari, p ≥ 3, k dispari e k=1+2*w con w>=0;
Famiglia **C**: N = 2^p*(1 + 4w) − 1, con p dispari, p ≥ 3, k pari e k=2*w con w>=0;
Famiglia **D**: N = 2^p*(3 + 4w) − 1, con p pari, p ≥ 2, k dispari e k=1+2*w con w>=0.

Quindi le famiglie **A** e **B** riguardano il caso 5 e le famiglie **C** e **D** riguardano il caso 6 della successione personalizzata.

Nelle tabelle seguenti vengono elencati i numeri N dispari congrui 3 mod.4 compresi tra 1 e 2^20=1048576 suddivisi per i casi 3 – 4 – 5 – 6 e per famiglie A – B – C – D.

Caso 3 con k dispari con k=1+2*w e con N[0]=4*(1+2*w)+1=8*w+5

N[0]=4*(1+2*w)+1	Quanti su 262.144 numeri dispari congruo 1 mod 4	N[1]=2*w+1	N[1] diminuisce o aumenta rispetto ad N[0]	probabilità su 1048576 numeri considerati	step dispari	step pari
8*w+5	0<=w<=131071	2*w+1	Diminuisce	12,5000000000%	0	2
Totale	131072		Totale	12,5000000000%		

Caso 4 con k pari con k=2*w e con N[0]=4*(2*w)+1=8*w+1

N[0]=4*(2*w)+1	Quanti su 262.144 numeri dispari congruo 1 mod 4	N[1]=6*w+1	N[1] diminuisce o aumenta rispetto ad N[0]	probabilità su 1048576 numeri considerati	step dispari	step pari
8*w+1	0<=w<=131071	6*w+1	Diminuisce	12,5000000000%	1	2
Totale	131072		Totale	12,5000000000%		

Famiglia A - Caso 5 con p pari e k pari con k=2*w quindi (1+2*k)=(1+4*w) con N[0]=2^p*(1+4*w)-1

p=	N[0]=2^p*(1+4*w)-1	Quanti su 262.144 numeri dispari congruo 3 mod 4	N[1]=(3^(p-1)*(1+4*w)-1)/2	N[1] diminuisce o aumenta rispetto ad N[0]	probabilità su 1048576 numeri considerati	step dispari	step pari
2	16*w+3	0<=w<=65535	6*w+1	Diminuisce	6,2500000000%	1	3
4	64*w+15	0<=w<=16383	54*w+13	Diminuisce	1,5625000000%	3	5
6	256*w+63	0<=w<=4095	486*w+121	Aumenta	0,3906250000%	5	7
8	1024*w+255	0<=w<=1023	4374*w+1093	Aumenta	0,0976562500%	7	9
10	4096*w+1023	0<=w<=255	39366*w+9841	Aumenta	0,0244140625%	9	11
12	16384*w+4095	0<=w<=63	354294*w+88573	Aumenta	0,0061035156%	11	13
14	65536*w+16383	0<=w<=15	3188646*w+797161	Aumenta	0,0015258789%	13	15
16	262144*w+65535	0<=w<=3	28697814*w+7174453	Aumenta	0,0003814697%	15	17
18	1048576*w+262143	w=0	258280326*w+64570081	Aumenta	0,0000953674%	17	19
20	4194304*w+1048575	w=0	2324522934*w+581130733	Aumenta	0,0000953674%	19	21
	Totale	87382		Totale	8,3333969116%		

Famiglia B - Caso 5 con p dispari e k dispari =1+2*w quindi (1+2*k)=(3+4*w) con N[0]=2^p*(3+4*w)-1

p=	N[0]=2^p*(3+4*w)-1	Quanti su 262.144 numeri dispari congruo 3 mod 4	N[1]=(3^(p-1)*(3+4*w)-1)/2	N[1] diminuisce o aumenta rispetto ad N[0]	probabilità su 1048576 numeri considerati	step dispari	step pari
3	32*w+23	0<=w<=32767	18*w+13	Diminuisce	3,1250000000%	2	4
5	128*w+95	0<=w<=8191	162*w+121	Aumenta	0,7812500000%	4	6
7	512*w+383	0<=w<=2047	1458*w+1093	Aumenta	0,1953125000%	6	8
9	2048*w+1535	0<=w<=511	13122*w+9841	Aumenta	0,0488281250%	8	10
11	8192*w+6143	0<=w<=127	118098*w+88573	Aumenta	0,0122070313%	10	12
13	32768*w+24575	0<=w<=31	1062882*w+797161	Aumenta	0,0030517578%	12	14
15	131072*w+98303	0<=w<=7	9565938*w+7174453	Aumenta	0,0007629395%	14	16
17	524288*w+393215	0<=w<=1	86093442*w+64570081	Aumenta	0,0001907349%	16	18
	Totali	43690		Totale	4,1666030884%		

Famiglia C - Caso 6 con p dispari e k pari con k=2*w quindi (1+2*k)=(1+4*w) con N[0]=2^p*(1+4*w)-1

p=	N[0]=2^p*(1+4*w)-1	Quanti su 262.144 numeri dispari congruo 3 mod 4	N[1]=(3^(p)*(1+4*w)-1)/2	N[1] diminuisce o aumenta rispetto ad N[0]	probabilità su 1048576 numeri considerati	step dispari	step pari
3	32*w+7	0<=w<=32767	54*w+13	Aumenta	3,1250000000%	3	4
5	128*w+31	0<=w<=8191	486*w+121	Aumenta	0,7812500000%	5	6
7	512*w+127	0<=w<=2047	4374*w+1093	Aumenta	0,1953125000%	7	8
9	2048*w+511	0<=w<=511	39366*w+9841	Aumenta	0,0488281250%	9	10
11	8192*w+2047	0<=w<=127	354294*w+88573	Aumenta	0,0122070313%	11	12
13	32768*w+8191	0<=w<=31	3188646*w+797161	Aumenta	0,0030517578%	13	14
15	131072*w+32767	0<=w<=7	28697814*w+7174453	Aumenta	0,0007629395%	15	16
17	524288*w+131071	0<=w<=1	258280326*w+64570081	Aumenta	0,0001907349%	17	18
19	2097152*w+524287	w=0	2324522934*w+581130733	Aumenta	0,0000953674%	19	20
	Totali	43691		Totale	4,1666984558%		

Famiglia D - Caso 6 con p pari e k dispari con k=1+2*w quindi (1+2*k)=(3+4*w) con N[0]=2^p*(3+4*w)-1

p=	N[0]=2^p*(3+4*w)-1	Quanti su 262.144 numeri dispari congruo 3 mod 4	N[1]=(3^(p)*(3+4*w)-1)/2	N[1] diminuisce o aumenta rispetto ad N[0]	probabilità su 1048576 numeri considerati	step dispari	step pari
2	16*w+11	0<=w<=65535	18*w+13	Aumenta	6,2500000000%	2	3
4	64*w+47	0<=w<=16383	162*w+121	Aumenta	1,5625000000%	4	5
6	256*w+191	0<=w<=4095	1458*w+1093	Aumenta	0,3906250000%	6	7
8	1024*w+767	0<=w<=1023	13122*w+9841	Aumenta	0,0976562500%	8	9
10	4096*w+3071	0<=w<=255	118098*w+88573	Aumenta	0,0244140625%	10	11
12	16384*w+12287	0<=w<=63	1062882*w+797161	Aumenta	0,0061035156%	12	13
14	65536*w+49151	0<=w<=15	9565938*w+7174453	Aumenta	0,0015258789%	14	15
16	262144*w+196607	0<=w<=3	86093442*w+64570081	Aumenta	0,0003814697%	16	17
18	1048576*w+786431	w=0	774840978*w+581130733	Aumenta	0,0000953674%	18	19
	Totale	87381		Totale	8,3333015442%		
Totale numeri N congrui 1 e 3 mod 4-->		524288	Totale probabilità N congrui 1 e 3 mod 4-->		50,00%		

In queste tabelle si nota:

1. come il numero iniziale N[0] ed il suo successivo N[1] dipendono dal valore di w>=0;
2. la quantità di N[0] ed N[1] per ogni valore di p e la rispettiva probabilità sul totale di 1048576 numeri pari e dispari;
3. se N[1] aumenta o diminuisce rispetto ad N[0] in base alla dipendenza di N[0] e di N[1] da w;
4. nella famiglia A con p=2 e con p=4 il valore di N[1] diminuisce rispetto al valore di N[0];
5. nella famiglia B con p=3 il valore di N[1] diminuisce rispetto al valore di N[0];
6. in tutti gli altri casi delle famiglie A – B – C – D il valore di N[1] aumenta rispetto al valore di N[0].

3. Riduzione delle famiglie A – B – C – D alle famiglie C – D.

Osservazione 3.1
Se confrontiamo tra di loro i valori di N[1] nelle tabelle precedenti si nota che essi sono uguali anche se derivano da valori diversi di N[0]. In effetti nella famiglia A con p=2 il valore di N[1]=6*w+1 coincide con il valore N[1] che deriva da N[0]=8*w+1 del caso 4. Inoltre ogni altro valore di N[1] della famiglia A con p pari e p>=4 coincide con il valore di N[1] che deriva da N[0] appartenente alla famiglia C con p dispari e p>=3. Ed infine si ha anche che ogni altro valore di N[1] della famiglia B con p dispari e p>=3 coincide con il valore di N[1] che deriva da N[0] appartenente alla famiglia D con p pari e p>=2.
In effetti questo accade per il teorema 3.1 seguente.

Teorema 3.1
Ogni numero N[0] congruo 3 mod.4 con N[0]=2^p*(1+2*k)-1 per ogni p>=2 e per ogni k>=0 è isopath al numero M[0] congruo 3 mod.4 con M[0]=2^(p-1) *(1+2*k)-1 dove M[0]<N[0].

Dimostrazione. Sia N[0]=2^p*(1+2*k)-1 con p e k aventi la stessa parità (famiglia A oppure B) e sia M[0]=2^(p-1)*(1+2*k)-1 con p-1 e k aventi parità diversa (famiglia C oppure D). Per la successione personalizzata si ha che N[0] è un caso 5 e quindi N[1]=(3^(p-1)*(1+2*k)-1)/2, mentre M[0] è un caso 6 per cui M[1]=(3^(p-1)*(1+2*k)-1)/2 e quindi N[1]= M[1] per cui N[0] ed M[0] sono isopath perché nella loro prima iterazione della successione personalizzata essi convergono allo stesso numero N[1]=M[1]=(3^(p-1)*(1+2*k)-1)/2 con p>=2 per ogni p pari o dispari e per ogni k>=0 intero e poiché 2^(p-1)*(1+2*k)-1<2^p*(1+2*k)-1 si ha che M[0]<N[0]. **C.v.d.**

Osservazione 3.2
Quindi considerando l'osservazione 3.1 ed il teorema 3.1 si ha che ogni numero della famiglia A con p>=2 e w>=0 ha un corrispondente numero minore ed isopath ad esso appartenente alla famiglia C con p-1>=1 e stesso w>=0 ed ogni numero della famiglia B con p>=3 e w>=0 ha un corrispondente numero minore ed isopath ad esso appartenente alla famiglia D con p-1>=2 e w>=0 e quindi di conseguenza se ogni numero della famiglia C oppure D soddisfa la congettura di Collatz allora anche ogni numero della famiglia A oppure B soddisfa la congettura di Collatz.

Esempio 1. Sia N[0]=2^p*(1+2*k)-1 un numero della famiglia A caso 5 con p=4 e k pari e k=2*w con w>=0 quindi N[0]=2^4*(1+2*2*w)-1=64*w+15 a cui, dopo la 1 iterazione della successione personalizzata, corrisponde N[1]=(3^(p-1) *(1+2*k)-1)/2=(3^3*(1+2*2*w)-1)/2=54*w+13 con w>=0. Sia M[0] un numero della famiglia C caso 6 con p-1=3 e stesso valore di k pari e k=2*w con w>=0 per cui M[0]= 2^3*(1+2*2*w)-1=32*w+7 a cui, dopo la 1 iterazione della successione personalizzata, corrisponde M[1]=(3^(p-1) *(1+2*k)-1)/2=(3^3*(1+2*2*w)-1)/2=54*w+13 con w>=0. Quindi N[1]=M[1] e M[0]<N[0].
Esempio 2. Sia N[0]=2^p*(1+2*k)-1 un numero della famiglia B caso 5 con p=3 e k dispari e k=1+2*w con w>=0 quindi N[0]=2^3*(3+2*2*w)-1=32*w+23 a cui, dopo la 1 iterazione della successione personalizzata, corrisponde N[1]=(3^(p-1) *(1+2*k)-1)/2=(3^2*(3+2*2*w)-1)/2=18*w+13 con w>=0. Sia M[0] un numero della famiglia D caso 6 con p-1=2 e stesso valore di k dispari e k=1+2*w con w>=0 per cui M[0]= 2^2*(3+2*2*w)-1=16*w+11 a cui, dopo la 1 iterazione della successione personalizzata,

corrisponde M[1]=(3^(p-1) *(1+2*k)-1)/2=(3^2*(3+2*2*w)-1)/2=18*w+13 con w>=0. Quindi N[1]=M[1] e M[0]<N[0].

4. Ulteriore riduzione dei numeri appartenenti alle famiglie C – D.

Dai paragrafi e tabelle precedenti possiamo adesso calcolare le percentuali dei numeri a cui corrispondono nella successione personalizzata dei numeri isopath e minori di essi.
Consideriamo un gruppo di numeri interi positivi e consecutivi sia pari che dispari compresi tra **1** e **2^n** con **n** molto grande e pari e quindi ci sono 2^(n-1) numeri pari, ci sono 2^(n-2) numeri dispari congrui 1 mod.4 (caso 3 e 4) e ci sono 2^(n-2) numeri dispari congrui 3 mod.4 (caso 5 e 6 cioè i numeri appartenenti alle 4 famiglie A-B-C-D). Quindi 2^(n-3) sono i numeri appartenenti alle famiglie A+B e 2^(n-3) sono i numeri appartenenti alle famiglie C+D. Inoltre essendo n pari nella famiglia D si ha che 2<=p<=n-2 e quindi il totale dei numeri appartenenti alla famiglia D sono 2^(n-4) per p=2 (cioè per p=2 si hanno già la metà dei numeri delle famiglie C+D), sono 2^(n-6) per p=4 e diminuiscono di ¼ per ogni aumento di 2 del valore di p fino a p=n-2 in cui vi è un solo numero N corrispondente al valore w=0. Quindi il totale dei numeri appartenenti alla famiglia D sono 2/3*(2^(n-3)+1)-1 e cioè 2/3 dei numeri appartenenti alle famiglie C e D insieme. Invece nella famiglia C essendo n pari si ha 3<=p<=n-1 per cui i numeri appartenenti alla famiglia C sono 2^(n-5) per p=3, sono 2^(n-7) per p=5 e diminuiscono di ¼ per ogni aumento di 2 del valore di p fino a p=n-1 in cui vi è un solo numero N corrispondente al valore w=0. Quindi il totale dei numeri appartenenti alla famiglia C è 1/3*(2^(n-3)+1) e cioè 1/3 dei numeri appartenenti alle famiglie C e D insieme. In effetti per n=20 si ha dalle tabelle considerate nel paragrafo 2 che il totale dei numeri appartenenti alla famiglia C è 1/3*(2^(n-3)+1)= 1/3*(2^(20-3)+1)= 43691 mentre il totale dei numeri appartenenti alla famiglia D sono 2/3*(2^(n-3)+1)-1=2/3*(2^(20-3)+1)-1=87381 per cui il totale dei numeri appartenenti alla famiglia C e D sono 43691+87381= 131072 = 2^(20-3) per n=20.
Sappiamo che tutti i numeri pari e tutti i numeri dispari congrui 1 mod.4 dopo la prima iterazione hanno un numero minore ed isopath ad essi e tutti i numeri delle famiglie A e B hanno un numero minore ed isopath ad essi in un corrispondente numero appartenente rispettivamente alle famiglie C e D. Quindi solo i numeri delle famiglie C e D aumentano il valore di N nelle iterazioni successive della successione personalizzata ed essi sono in totale 2^(n-3) sul totale di 2^n numeri considerati, cioè **il 12,5% di tutti i numeri considerati (infatti 2^(n-3)/2^n =2^(-3)=1/8=0,125). Ma tutti i numeri appartenenti al 12,5% delle famiglie C e D hanno tra di loro probabilità molto diverse di presentarsi nella successione personalizzata (la probabilità determina il totale di essi nella rispettiva famiglia in base al valore di p e questa diminuisce di ¼ ogni volta che il valore di p aumenta di 2 in ognuna delle famiglie C e D) e questi valori di probabilità (per ogni valore di p) sono gli stessi qualunque sia il gruppo di numeri 2^n considerati cioè questi valori di probabilità attribuiti ad ogni valore di p nelle famiglie C e D non dipendono dal valore scelto di n.**
In effetti come si evince dalle tabelle considerate prima per **n=20** le probabilità con cui si presentano i numeri diminuiscono rispetto all'aumento di p cioè le probabilità dei numeri diminuiscono di ¼ rispetto alla probabilità dei numeri precedenti in ogni famiglia. Infatti nella famiglia **D** per **p=2 si ha probabilità del 6,25%** (½ dei numeri appartenenti al totale delle famiglie C e D insieme) e per **p=4 si ha probabilità del 1,5625%** (¼ della precedente) e nella famiglia **C** per **p=3 si ha probabilità del 3,125%** (¼ dei numeri appartenenti al totale delle famiglie C e D insieme) e per **p=5 si ha probabilità del 0,78125%** (¼ della precedente) C e D. inoltre se si considerano solo i valori di **2<=p<=5** (compresi ed uguali tra 2 e 5) si arriva alla probabilità di **11,71875%** per i numeri delle famiglie C e D**.** Per **p=19** della famiglia **C si ha probabilità del 0,0000953674%** e per **p=18** della famiglia **D si ha probabilità del 0,0000953674%.**
Con i teoremi seguenti possiamo diminuire quel **12,5%** dei numeri delle famiglie C e D che aumentano il valore di N[0] nelle prime iterazioni della successione personalizzata.

Nota 4.1 Di seguito in base ad ogni teorema seguente sulle famiglie C e D si eliminerà sempre dal **12,5%** quella percentuale di numeri N[0] iniziali che soddisfa ad una delle seguenti opzioni:

1. è isopath ad un numero M[0] con M[0]<N[0];

2. dopo due iterazioni della successione personalizzata converge ad N[2]<N[0] cioè ***scivola*** durante la successione.

Teorema 4.1 Ogni numero N[0] congruo 3 mod.4 con N[0]=2^2*(1+2*k)-1 della famiglia D (caso 6 con p=2 e con k dispari e k=1+2*w e con w pari e w=2*t per ogni t>=0) dopo 2 iterazioni della successione personalizzata si trasforma in N[2]=9*t+3 con 2 passaggi dispari e 5 passaggi pari se t è pari oppure in N[2]=27*t+10 con 3 passaggi dispari e 5 passaggi pari se t è dispari dove N[2]<N[0].
Dimostrazione. Sia N[0]=2^2*(1+2*k)-1 della famiglia D (caso 6 con p=2 e con k dispari e k=1+2*w e con w pari e w=2*t per ogni w>=0) per cui N[0]=2^2*(1+2*k)-1=2^2*(1+2*(1+4*t))-1=4*(3+8*t))-1=32*t+11 che essendo un caso 6 si trasforma dopo la 1 iterazione in N[1]=(3^2*(3+8*t)-1)/2= 36*t+13 cioè N[1]=4*(9*t+3)+1 dove esso è un caso 3 se t è pari (per cui 9*t+3 è dispari) oppure un caso 4 se t è dispari (per cui 9*t+3 è pari) e quindi nella 2 iterazione della successione personalizzata si ha che N[2]= 9*t+3 se t è pari oppure N[2]= 3*(9*t+3)+1=27*t+10 se t è dispari ed in entrambi i casi confrontando N[0] iniziale con N[2] si ha sempre N[2]<N[0]. **C.v.d.**

Teorema 4.2 Ogni numero N[0] congruo 3 mod.4 della famiglia D (caso 6 con p>=2 e con k dispari e k=1+2*w) con w dispari e multiplo di 3 cioè w=3*(1+2*t) per ogni t>=0 per cui w=3+6*t è dispari è isopath al numero M[0]=2^(p+1)*(1+2*(2+4*t))-1 della famiglia C caso 6 con p+1 dispari e p+1>=3 e con k pari e k=2*(1+2*t)=2+4*t e si ha M[0]<N[0].
Dimostrazione. Sia N[0]=2^p*(3+4*w)-1=2^p*(3+4*(3+6*t))-1=2^p*(15+24*t)-1=2^p*3*(5+8*t)-1 della famiglia D (caso 6 con p>=2 e con k dispari e k=1+2*w) e con w dispari e multiplo di 3 cioè w=3*(1+2*t)=3+6*t per ogni t>=0 e poiché N[0] è un caso 6 esso si trasforma nella prima iterazione in N[1]= (3^p*(3+4*(3+6*t))-1)/2= (3^(p+1)*(1+4*(1+2*t))-1)/2=(3^(p+1)*(8*t+5)-1)/2 per ogni t>=0. Consideriamo il numero M[0] della famiglia C caso 6 con p+1>=3 dispari e con k pari e k=2*(1+2*t) per cui M[0]=2^(p+1)*(1+2*k)-1=2^(p+1)*(1+2*2*(1+2*t))-1=2^(p+1)*(5+8*t))-1 e poiché M[0] è un caso 6 esso si trasforma nella prima iterazione in M[1]=(3^(p+1)*(1+2*2*(1+2*t))-1)/2=(3^(p+1)*(8*t+5)-1)/2 cioè N[1]=M[1] per cui N[0] ed M[0] sono tra di loro isopath poiché dopo la prima iterazione nelle rispettive successioni personalizzate entrambi convergono ad N[1]=M[1] ed inoltre poiché 2^(p+1)*(5+8*t))-1<2^p*3*(5+8*t)-1 si ha M[0] < N[0] per ogni valore di t>=0. **C.v.d.**

Teorema 4.3 Ogni numero N[0] congruo 3 mod.4 con N[0]=2^p*(3+4*w)-1 della famiglia D caso 6 con p pari e p>=4 e con k dispari e k=1+2*w con w pari o dispari e multiplo di 3 cioè w=3*t per ogni t>=0 è isopath al numero M[0]=2^(p+1)*(1+2*(2*t))-1 della famiglia C caso 6 con p+1 dispari e p+1>=5 e con k pari e k=2*t e si ha M[0]<N[0].
Dimostrazione. Sia N[0]= 2^p*(3+4*w)-1 della famiglia D caso 6 con p pari e p>=4 e con k dispari e k=1+2*w con w pari o dispari e multiplo di 3 cioè w=3*t per ogni t>=0 per cui dopo le dovute sostituzioni si ha N[0]= 2^p*(3+4*3*t)-1]= 2^p*(3*(1+4*t))-1=3*2^p*(1+4*t))-1 e poiché N[0] è un caso 6 esso si trasforma nella prima iterazione in N[1]=(3^p*(3*(1+4*t))-1)/2=(3^(p+1)*(1+4*t))-1)/2. Consideriamo il numero M[0] della famiglia C caso 6 con p+1 dispari e p+1>=5 e con k pari e k=2*t con t pari o dispari e per ogni t>=0 per cui M[0]=2^(p+1)*(1+4*t)-1 e poiché M[0] è un caso 6 esso si trasforma nella prima iterazione in M[1]=(3^(p+1)*(1+4*t)-1)/2 per cui risulta M[1]=(N[1]. Quindi N[0] ed M[0] sono tra di loro isopath poiché dopo la prima iterazione nelle rispettive successioni personalizzate entrambi convergono ad N[1]=M[1]= =(3^(p+1)*(1+4*t)-1)/2 e poiché 2^(p+1)*(1+4*t)-1<3*2^p*(1+4*t))-1 si ha M[0]<N[0]. **C.v.d.**

Teorema 4.4 Ogni numero N[0] congruo 3 mod.4 con N[0]=2^4*(3+4*w)-1 della famiglia D caso 6 con p pari e p=4 e con k dispari e k=1+2*w con w pari e w=2+12*t per ogni t>=0 dopo 2 iterazioni della successione personalizzata si trasforma in N[2]=486*t+111 con 4 passaggi dispari e 7 passaggi pari e si ha N[2]<N[0].
Dimostrazione. Sia N[0]=2^4*(3+4*w)-1 della famiglia D caso 6 con p pari e p=4 e con k dispari e k=1+2*w con w pari e w=2+12*t per ogni t>=0 per cui N[0]=16*(3+4*(2+12*t))-1=768*t+175 e poiché N[0] è un caso 6 si trasforma dopo la 1 iterazione con 4 passaggi dispari e 5 passaggi pari in N[1]=(3^4*(3+4*(2+12*t))-1)/2=1944*t+445 cioè N[1]=4*(486*t+111)+1 dove esso è un caso 3 con

486*t+111 dispari e quindi nella 2 iterazione della successione personalizzata con 0 passaggi dispari e 2 passaggi pari si ha che N[2]=486*t+111 e poiché 486*t+111<768*t+175 si ha che N[2]<N[0] per ogni t>=0 ed inoltre nella successione da N[0] a N[2] ci sono con 4 passaggi dispari e 7 passaggi pari. **C.v.d.**

Teorema 4.5 Ogni numero N[0] congruo 3 mod.4 con N[0]=2^4*(3+4*w)-1 della famiglia D caso 6 con p pari e p=4 e con k dispari e k=1+2*w con w pari e w=10+12*t per ogni t>=0 dopo 2 iterazioni della successione personalizzata con 4 passaggi dispari e 7 passaggi pari si trasforma in N[2]= 486*t+435 e si ha N[2]<N[0].
Dimostrazione. Sia N[0]=2^4*(3+4*w)-1 della famiglia D caso 6 con p pari e p=4 e con k dispari e k=1+2*w con w pari e w=10+12*t per ogni t>=0 per cui N[0]=16*(3+4*(10+12*t))-1=768*t+687 e poiché N[0] è un caso 6 si trasforma dopo la 1 iterazione con 4 passaggi dispari e 5 passaggi pari in N[1]=(3^4*(3+4*(10+12*t))-1)/2=24*81*t+1741 cioè N[1]=4*(6*81*t+435)+1 dove esso è un caso 3 con 6*81*t+435 dispari e quindi nella 2 iterazione della successione personalizzata con 0 passaggi dispari e 2 passaggi pari si ha che N[2]= 6*81*t+435 =486*t+435 e poiché 486*t+435 <768* t+687 si ha che N[2]<N[0] per ogni t>=0 ed inoltre nella successione da N[0] a N[2] ci sono con 4 passaggi dispari e 7 passaggi pari. **C.v.d.**

Teorema 4.6 Ogni numero N[0] congruo 3 mod.4 con N[0]=2^3*(1+4*w)-1 della famiglia C caso 6 con p dispari e p=3 e con k pari e k=2*w con w pari e w=4*t per ogni t>=0 dopo 2 iterazioni della successione personalizzata con 3 passaggi dispari e 6 passaggi pari si trasforma in N[2]= 54*t+3 e si ha N[2]<N[0].
Dimostrazione. Sia N[0]=2^3*(1+4*w)-1 della famiglia C caso 6 con p dispari e p=3 e con k pari e k=2*w con w pari e w=4*t per ogni t>=0 per cui N[0]=8*(1+4*(4*t))-1=128*t+7 e poiché N[0] è un caso 6 si trasforma dopo la 1 iterazione con 3 passaggi dispari e 4 passaggi pari in N[1]=(3^3*(1+4*(4*t))-1)/2=8*27*t+13 cioè N[1]=4*(2*27*t+3)+1 dove esso è un caso 3 con 2*27*t+3 dispari e quindi nella 2 iterazione della successione personalizzata con 0 passaggi dispari e 2 passaggi pari si ha che N[2]= 2*27*t+3 =54*t+3 e poiché 54*t+3<128*t+7 si ha che N[2]<N[0] per ogni t>=0 ed inoltre nella successione da N[0] a N[2] ci sono con 3 passaggi dispari e 6 passaggi pari. **C.v.d.**

Teorema 4.7 Ogni numero N[0] congruo 3 mod.4 con N[0]=2^5*(1+4*w)-1 della famiglia C caso 6 con p dispari e p=5 e con k pari e k=2*w con w pari e w=2+4*t per ogni t>=0 dopo 2 iterazioni della successione personalizzata con 5 passaggi dispari e 8 passaggi pari si trasforma in N[2]= 486*t+273 e si ha N[2]<N[0].
Dimostrazione. Sia N[0]=2^5*(1+4*w)-1 della famiglia C caso 6 con p dispari e p=5 e con k pari e k=2*w con w pari e w=2+4*t per ogni t>=0 per cui N[0]=32*(1+4*(2+4*t))-1=512*t+287 e poiché N[0] è un caso 6 si trasforma dopo la 1 iterazione con 5 passaggi dispari e 6 passaggi pari in N[1]=(3^5*(1+4*(2+4*t))-1)/2=8*243*t+1093 cioè N[1]=4*(2*243*t+273)+1 dove esso è un caso 3 con 2*243*t+273 dispari e quindi nella 2 iterazione della successione personalizzata con 0 passaggi dispari e 2 passaggi pari si ha che N[2]= 2*243*t+273 =486*t+273 e poiché 486*t+273 <512*t+287 si ha che N[2]<N[0] per ogni t>=0 ed inoltre nella successione da N[0] a N[2] ci sono con 5 passaggi dispari e 8 passaggi pari. **C.v.d.**

Nota 4.2 Come anticipato nella **Nota 4.1** e come conseguenza dei **teoremi dal 4.1 al 4.7** nelle seguenti tabelle per il gruppo di numeri da 1 a 2^20 abbiamo in base ai teoremi precedenti la quantità e la probabilità dei numeri che soddisfano lo stesso teorema.

Teorema	Probabilità
Teorema 4.1	3,12500000000000000%
Teorema 4.2	1,38845443725586000%
Teorema 4.3	0,34751892089843700%
Teorema 4.4	0,13027191162109400%
Teorema 4.5	0,13017654418945300%
Teorema 4.6	0,78125000000000000%
Teorema 4.7	0,19531250000000000%
Totale probabilità	6,09798431396484000%

Famiglia C - Caso 6 con p dispari e k pari con k=2*w quindi (1+2*k)=(1+4*w) con N[0]=2^p*(1+4*w)-1					
Totali numeri famiglia C	43691	Numeri che scivolano		Probabilità Numeri che scivolano	
p=	probabilità su 1048576 numeri considerati	Teorema 4.6 w=0+4*t	Teorema 4.7 w=2+4*t	Teorema 4.6 w=0+4*t	Teorema 4.7 w=2+4*t
3	3,1250000000%	8192		0,781250%	
5	0,7812500000%		2048		0,19531250%
7	0,1953125000%				
9	0,0488281250%				
11	0,0122070313%				
13	0,0030517578%				
15	0,0007629395%				
17	0,0001907349%				
19	0,0000953674%				
Totale	4,1666984558%	8192	2048	0,78125000%	0,19531250%
	Totale numeri che scivolano --->			10240	
	Totale probabilità famiglia C-->			0,97656250%	

Famiglia D - Caso 6 con p pari e k dispari con k=1+2*w quindi (1+2*k)=(3+4*w) con N=2^p*(3+4*w)-1											
Totali numeri famiglia D	87381	Numeri che scivolano					Probabilità Numeri che scivolano				
p=	probabilità su 1048576 numeri considerati	Teorema 4.2 w=3+6*t	Teorema 4.3 w=0+3*t	Teorema 4.4 w=2+12*t	Teorema 4.5 w=10+12*t	Teorema 4.1 w=0+2*t	Teorema 4.2 w=3+6*t	Teorema 4.3 w=0+3*t	Teorema 4.4 w=2+12*t	Teorema 4.5 w=10+12*t	Teorema 4.1 w=0+2*t
2	6,2500000000000%	10922				32768	1,0416030883789%				3,1250000000000%
4	1,5625000000000%	2730	2731	1366	1365		0,2603530883789%	0,2604484558105%	0,1302719116211%	0,1301765441895%	
6	0,3906250000000%	682	683				0,0650405883789%	0,0651359558105%			
8	0,0976562500000%	170	171				0,0162124633789%	0,0163078308105%			
10	0,0244140625000%	42	43				0,0040054321289%	0,0041007995605%			
12	0,0061035156250%	10	11				0,0009536743164%	0,0010490417480%			
14	0,0015258789063%	2	3				0,0001907348633%	0,0002861022949%			
16	0,0003814697266%	1	1				0,0000953674316%	0,0000953674316%			
18	0,0000953674316%	0	1				0,0000000000000%	0,0000953674316%			
Totale	8,3333015441895%	14559	3644	1366	1365	32768	1,3884544372559%	0,3475189208984%	0,1302719116211%	0,1301765441895%	3,1250000000000%
			Totale numeri che scivolano --->			53702	Totale probabilità numeri che scivolano famiglia D -->			5,12142181396484%	

Quindi anche i numeri appartenenti alle famiglie C e D di un gruppo di numeri interi consecutivi compresi **tra 1 e 2^n** per ogni n grande (cioè il **12,5%)** che soddisfano alle due opzioni della **Nota 4.1** sono il **6,09 %** del gruppo per cui il restante **6,41%** non ***scivola*** nelle prime 2 iterazioni oppure non ha un numero minore a cui è isopath.
Le tabelle che seguono individuano per le famiglie C e D i valori di w, il totale di numeri corrispondente al valore di p e al valore di w e la relativa probabilità dei numeri che non scivolano del gruppo di numeri compreso tra 1 e 2^20.

Famiglia C - Caso 6 con p dispari e k pari con N[0]=2^p*(1+4*w)-1					
Numeri che non scivolano nelle prime 2 iterazioni					
p=	w=1+2*t	w=0+4*t	w=2+4*t	numeri totali	Probabilità
3	16384		8192	24576	2,3437500%
5	4096	2048		6144	0,5859375%
7	1024	512	512	2048	0,1953125%
9	256	128	128	512	0,0488281%
11	64	32	32	128	0,0122070%
13	16	8	8	32	0,0030518%
15	4	2	2	8	0,0007629%
17	1	1		2	0,0001907%
19		1		1	0,0000954%
Totali --->	21845	2732	8874	33451	3,1901360%

Famiglia D - Caso 6 con p pari e k dispari con N[0]=2^p*(3+4*w)-1							
Numeri che non scivolano nelle prime 2 iterazioni							
p=	w=1+6*t	w=5+6*t	w=4+12*t	w=6+12*t	w=0+2*t	numeri totali	Probabilità
2	10923	10923				21846	2,0833969%
4	2731	2730	1365	1364		8190	0,7810593%
6	342	341			2048	2731	0,2604485%
8	86	85			512	683	0,0651360%
10	22	21			128	171	0,0163078%
12	6	5			32	43	0,0041008%
14	2	1			8	11	0,0010490%
16	1				2	3	0,0002861%
18					1	1	0,0000954%
Totali --->	14113	14106	1365	1364	2731	33679	3,2118797%

Inoltre i valori delle precedenti tabelle **rimangono le stesse** anche per gruppi di numeri da 1 a 2^n per qualunque valore di n poiché:

1. le famiglie C e D sono definite da condizioni modulari e parametriche (su p – k – w , ecc.) che si ripetono in modo regolare anche nell'intervallo [1; 2^n];
2. nell'intervallo [1; 2^n] le percentuali che sono in tabella (per ogni valore di p per ogni blocco di "numeri totali") sono **densità**, non numeri assoluti casuali;

3. se si estende a [1; 2^n], non si sta cambiando la legge che genera le famiglie C e D, ma solo **ripetendo la stessa struttura su un intervallo più grande**.

Quindi le **probabilità per ogni riga** (quelle che hai nelle tabelle di C e D) e la **somma totale** (il famoso **6,41%** del sottoinsieme critico) sono **stabili per qualunque valore di n.**

5. Il modello di decadimento geometrico delle famiglie C e D

Nella successione personalizzata di Collatz, i numeri appartenenti alle famiglie C e D rappresentano gli unici candidati potenzialmente in grado di aumentare il valore di N[0] nelle iterazioni successive alla seconda, ma nella successione personalizzata si ha la probabilità del **93,59% di convergere verso numeri minori del numero iniziale di ogni iterazione.**
In questa sezione si introduce un modello di **decadimento geometrico**, che descrive in modo quantitativo la progressiva riduzione della densità dei numeri "pericolosi" delle famiglie C e D nelle iterazioni successive alla seconda. Tale modello costituisce un passaggio fondamentale per dimostrare che la successione personalizzata converge necessariamente a 1.
Abbiamo visto che considerando l'intervallo dei numeri da 1 a 2^n per ogni n intero positivo la classificazione modulare delle famiglie A, B, C e D implica che la densità di (**C**∪**D**) è 12,5% e che il **6,09%** dei numeri delle famiglie C e D scivola entro le prime due iterazioni oppure possiede un numero isopath minore per cui il **residuo** dei numeri potenzialmente pericolosi è pari a p_0=6,41% e questo valore rappresenta la densità iniziale dei numeri che, dopo due iterazioni, non sono ancora stati eliminati.
Per ogni iterazione composta successiva alla seconda, si osserva che un numero appartenente alle famiglie C e D ha probabilità del 93,59% di scendere sotto il valore iniziale dell'iterazione oppure di avere un numero isopath minore per cui la probabilità complementare, ovvero la probabilità che il numero **non** scivoli in una iterazione, è r=1- q = 0,0641. Questa probabilità rappresenta la frazione dei numeri che rimane "attiva" e potenzialmente in grado di aumentare il valore di N.
Sia p_k la densità dei numeri delle famiglie C e D che non scivolano dopo k iterazioni successive alla seconda. Il processo di riduzione è descritto dalla progressione geometrica:

$$p_k = p_0 \cdot r^k = 0{,}0641 \cdot (0{,}0641)^k.$$

I primi valori sono:

$$p_0 = 0{,}0641,$$
$$p_1 = 0{,}0641^2 \approx 0{,}00411,$$
$$p_2 = 0{,}0641^3 \approx 0{,}00026,$$
$$p_3 = 0{,}0641^4 \approx 0{,}000017.$$

La densità dei numeri pericolosi si riduce quindi in modo estremamente rapido: già dopo tre o quattro iterazioni successive alla seconda, la massa residua è trascurabile.
Teorema 5.1 (del decadimento geometrico) Sia $p_0 = 0{,}0641$ la densità dei numeri delle famiglie C e D che non scivolano entro le prime due iterazioni della successione personalizzata. Sia $r = 0{,}0641$ la probabilità che tali numeri non scivolino in una iterazione successiva. Allora la densità dei numeri che non scivolano dopo k iterazioni è:

$$p_k = p_0 r^k.$$

In particolare:

$$\lim_{k\to\infty} p_k = 0.$$

Dimostrazione. La successione $\{p_k\}$ è una progressione geometrica con ragione $r < 1$. Poiché $0 < r < 1$, segue immediatamente che:

$$\lim_{k\to\infty} p_0 r^k = 0.$$

Pertanto, la densità dei numeri delle famiglie C e D che non scivolano tende a zero.

6. Conseguenze sulla convergenza della successione personalizzata

Il modello di decadimento geometrico mostra che la massa dei numeri potenzialmente in grado di aumentare il valore di *N* si riduce rapidamente e tende a zero.

Inoltre, la struttura delle iterazioni composte garantisce che la differenza tra i passi pari e i passi dispari aumenta sempre di 1 oppure di 2 unità e tale differenza cresce indefinitamente lungo la successione. Ricordiamo che in ogni iterazione se il numero iniziale di essa è un caso 3 oppure un caso 5 (numeri delle famiglie A e B) alla fine dell'iterazione la differenza tra passi pari e i passi dispari è aumentata di 2 unità, mentre se il numero iniziale di essa è un caso 4 oppure un caso 6 (numeri delle famiglie C e D) alla fine dell'iterazione la differenza tra passi pari e i passi dispari è aumentata di 1 unità. Quindi dopo k iterazioni si ha $(b_0-a_0)+(b_1-a_1)+\cdots+(b_k-a_k)\geq k$ per cui la crescita è **lineare**, e spesso **super-lineare** se nelle iterazioni compaiono i casi 3 oppure i casi 5. Il fattore complessivo di riduzione dopo iterazioni è:

$$\frac{2^{b_0+b_1+\cdots+b_k}}{3^{a_0+a_1+\cdots+a_k}}$$

e poiché $(b_0-a_0)+\cdots+(b_{k-ak})\geq k$, si ha: $b_0+\cdots+b_k \geq a_0+\cdots+a_k+k$ e quindi

$$2^{b_0+\cdots+b_k} \geq 2^{a_0+\cdots+a_k+k}.$$

Da cui:

$$\frac{2^{b_0+\cdots+b_k}}{3^{a_0+\cdots+a_k}} \geq 2^k \left(\frac{2}{3}\right)^{a_0+\cdots+a_k}.$$

Il termine cresce esponenzialmente, mentre decresce. Quindi il fattore complessivo di riduzione tende a $2^k \left(\frac{2}{3}\right)^{a_0+\cdots+a_k}$ **infinito**, quindi ne consegue che il fattore di riduzione 2^b (dove b indica i passi totali pari) domina il fattore di espansione 3^a (dove a indica i passi totali dispari) e quindi ogni numero, dopo un numero finito di iterazioni, deve necessariamente scivolare.

7. Conclusione

Combinando questo ultimo risultato con il **Teorema 5.1 (del decadimento geometrico)**, si ha che il decadimento geometrico riduce rapidamente la massa dei numeri che potrebbero salire, mentre la crescita di *b-a* mostra che ogni numero, anche del 6,41% residuo, deve scendere dopo un numero finito di iterazioni per cui questi due risultati insieme costituiscono la base della dimostrazione della convergenza della successione personalizzata la quale converge inevitabilmente a 1.

8. Riferimenti

- Ardito Nicola — *La congettura di Collatz da un punto di vista elementare*. La congettura di Collatz dal punto di vista elementare
- Ardito Nicola — *Successione di Collatz Personalizzata, Riduzione Modulare, Orbite Isopath e Analisi dei Passaggi Pari e Dispari*.
- Ardito Nicola — *Dalla successione di Collatz Personalizzata si deduce la veridicità della stessa*.
- Ardito Nicola — *Una proposta di convergenza per la successione di Collatz: la Congettura personalizzata*
- Ardito Nicola — *Una proposta di convergenza per la successione di Collatz: la dimostrazione geometrica della Congettura personalizzata*